

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра высшей математики и методики преподавания математики

УТВЕРЖДАЮ  
проректор

\_\_\_\_\_ П. А. Машаров  
«17» апреля 2025 г.  
МП

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

Углубленная группа направлений подготовки Программа высшего образования	44.00.00 Образование и педагогические науки Программа бакалавриата
Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) Математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2025

Рабочая программа дисциплины «**Дифференциальная геометрия и топология**» для обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (Профиль: Математика и информатика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 22 февраля 2018 г. № 125 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2025 года.

Разработчик:

профессор кафедры высшей математики и  
методики преподавания математики

доктор физ.-мат. наук,  
профессор

А.В. Мазнев

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики

Протокол от 10.04.2025 г. № 9

Заведующий кафедрой

Е.И. Скафа

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий

16.04.2025 г.

И. А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.

Протокол от 16.04.2025 г. № 3.

Председатель

Л. И. Селякова

Руководитель основной образовательной  
программы, д-р пед. наук, проф.

16.04.2025 г.

Е.И. Скафа

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ; Дифференциальные уравнения и Аналитическая геометрия.

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Теоретическая механика; Основы математического моделирования.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (Профиль: Математика и информатика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.В.ОД. Дифференциальная геометрия и топология
Часть образовательной программы	Вариативная часть: выбор вуза
Количество зачетных единиц / всего часов	3,5/ 126

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	2	4	28	-	42	56	126	экзамен

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Изучение методов исследования локальных свойств кривых и поверхностей, классификация кривых и поверхностей на основе инвариантов, изучение метрики в евклидовой и римановой геометрии, освоение фундаментальных понятий метрических и топологических пространств, компактности, связности, формирования навыков использования приложений геометро-топологических конструкций и методов в процессе дальнейшего обучения.

**4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ  
ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ  
И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ**

Компетенции	Индикаторы	Результаты обучения
ПК-4. Способен применять знание основных положений математической науки и информатики, основных положений истории развития математики и информатики, эволюции математических идей в профессиональной деятельности.	ПК – 4.1. Применяет основные определения и теоремы дифференциальной геометрии и топологии для решения задач.	ПК-4.1.1. Знает как находить длины кривых и переходить к натуральной параметризации. ПК-4.1.2. Знает как определять главные направления и вычислять главные кривизны поверхности. ПК-4.1.2. Умеет определять уравнения элементов трехгранника Френе. ПК-4.1.3. Умеет вычислять первую и вторую квадратичные формы поверхности. ПК-4.1.4. Умеет находить углы между кривыми и площадь куска поверхности. ПК-4.1.5. Умеет вычислять геодезические кривизны линий на поверхности. ПК-4.1.6. Умеет проводить измерения длин кривых на поверхности для евклидовой и римановой метрик
	ПК – 4.2. Демонстрирует умение интерпретировать геометрические модели в контексте естественных наук и компьютерных технологий.	ПК-4.2.1. Знает основные аксиоматические системы геометрии. ПК-4.2.2. Применяет методы геометрического моделирования в профессиональных задачах. ПК-4.2.3. Владеет основными понятиями дифференциальной, проективной и алгебраической геометрии.

**5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Теория кривых	
Первоначальные сведения о кривых на плоскости.	Способы задания кривой на плоскости. Обыкновенные и особые точки на кривой. Строение кривой вблизи обыкновенной точки. Строение кривой вблизи особой точки. Основные факты.
Вектор-функция одной переменной	Определение и вектор-функции. Предел вектор-функции. Непрерывность вектор-функции. Дифференцируемость вектор-функции. Ряд Тейлора для вектор-функции. Интегрируемость вектор-функции. Касательная к кривой. Уравнения касательной. Длина кривой. Естественная (натуральная) параметризация кривой. Бирегулярные кривые.
Сопровождающий трехгранник. Формулы Френе.	Соприкасающаяся плоскость и ее уравнение. Сопровождающий трехгранник (трехгранник Френе) и его элементы. Формулы Френе для пространственной кривой.

Кривизна и кручение кривой. Основная теорема теории кривых. Классификация кривых.	Кривизна и кручение пространственной кривой. Основные формулы для вычисления кривизны и кручения. Натуральные уравнения пространственных кривых. Основная теорема теории кривых. Классификация кривых по их натуральным уравнениям.
Исследование плоских кривых	Касание кривых. Соприкосновение плоских кривых. Соприкасающаяся окружность. Эволюты и эвольвенты плоских кривых. Огибающая семейства кривых. Асимптоты. Асимптоты алгебраических кривых. Строение кривой в окрестности произвольной точки
Раздел 2. Теория поверхностей и Риманова геометрия	
Первоначальные сведения по теории поверхностей	Основные способы задания поверхностей. Задание поверхности в виде вектор-функции двух переменных. Обыкновенные и особые точки поверхности. Кривые на поверхности. Координатные линии на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
Первая и вторая квадратичные формы на поверхности.	Понятие о первой квадратичной форме на поверхности. Измерение длин, углов и площадей на поверхности. Понятие изометрии. Изометричные поверхности. Вторая квадратичная форма на поверхности
Кривизна кривой и поверхности	Основная формула для кривизны кривой на поверхности. Нормальная кривизна кривой и геодезическая кривизна кривой. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении. Главные кривизны и главные направления. Теорема Родрига. Формула Эйлера. Индикатриса Дюпена.
Классификация точек на поверхности.	Гауссова и средняя кривизна поверхности. Эллиптические, гиперболические и параболические точки. Основная теорема теории поверхностей.
Классификация линий на поверхности. Риманова метрика.	Линии кривизны. Асимптотические линии. Геодезические линии. Кратчайшие линии на поверхности. Поверхности постоянной гауссовой кривизны. Риманова метрика. Измерения в римановой геометрии. Неэвклидовы геометрии. Модели неэвклидовых геометрий.

## 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 4

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего

Раздел 1. Теория кривых	<b>14</b>	<b>-</b>	<b>21</b>	<b>28</b>	<b>63</b>
Первоначальные сведения о кривых на плоскости.	2	-	4	5	11
Вектор-функция одной переменной	2	-	4	5	11
Сопровождающий трехгранник. Формулы Френе.	3	-	4	6	13
Кривизна и кручение кривой. Основная теорема теории кривых. Классификация кривых.	4	-	4	6	14
Исследование плоских кривых	3	-	5	6	14
Раздел 2. Теория поверхностей и Риманова геометрия	<b>14</b>	<b>-</b>	<b>21</b>	<b>28</b>	<b>63</b>
Первоначальные сведения по теории поверхностей	2	-	4	5	11
Первая и вторая квадратичные формы на поверхности.	3	-	4	5	12
Кривизна кривой и поверхности	2	-	4	6	12
Классификация точек на поверхности.	4	-	4	6	14
Классификация линий на поверхности. Риманова метрика.	3	-	5	6	14
<b>ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП</b>	<b>28</b>	<b>—</b>	<b>42</b>	<b>56</b>	<b>126</b>

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

1. Могут ли различные параметрические уравнения определять одну и ту же кривую?
2. Следует ли из непрерывности вектор-функции непрерывность ее координатных функций?
3. Следует ли из дифференцируемости вектор-функции дифференцируемость ее координатных функций?
4. Вытекает ли дифференцируемость вектор-функции из дифференцируемости ее модуля? Почему?
5. Является ли условие регулярности кривой достаточным условием существования касательной?
6. Каков геометрический смысл: а) кривизны; б) модуля кручения кривой?
7. Зависит ли кручение кривой от ее параметризации? Почему?
8. Будет ли кривая плоской, у которой в каждой точке кручение равно нулю, а в одной точке кручение неопределено? Почему?
9. Можно ли по кривизне кривой определить, является ли она отрезком прямой?
10. Что можно сказать о кривизнах в соответствующих точках подобных кривых?
11. Какие значения может принимать натуральный параметр на окружности радиуса 4?
12. Существует ли базис Френе в точках прямой?
13. Изменяется ли при переходе к новой параметризации в произвольной точке регулярной кривой вектор скорости?
14. Будет ли кривая  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  бирегулярной, если  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}''$  ненулевые векторы? Почему?
15. Как расположены вектор скорости и вектор ускорения в произвольной точке, если параметр на кривой натуральный?
16. Существует ли базис Френе в точках регулярной кривой? Почему?
17. Может ли кривизна быть равной нулю в одной точке кривой?
18. Для каких кривых можно построить базис Френе? Почему?

19. Какие существуют способы задания поверхностей?
20. Можно ли параметрическими уравнениями задать полностью всю сферу?
21. Каков геометрический смысл векторов: а)  $\vec{r}_u$  и  $\vec{r}_v$ ? б)  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ?
22. Могут ли две координатные линии касаться друг друга в некоторой точке регулярной кривой?
23. Какие кривые являются координатными линиями на плоскости: а) в декартовой системе координат? б) в полярной системе координат?
24. Меняются ли при замене параметров на поверхности координатные линии.
25. Каков геометрический смысл вектора  $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ ?
26. Каков геометрический смысл значений первой квадратичной формы на поверхности?
27. По каким формулам можно вычислить длину кривой на поверхности, угол между линиями на поверхности?
28. Меняется ли при замене криволинейных координат на поверхности: а) первая квадратичная форма поверхности? б) площадь поверхности? в) нормальный вектор к поверхности?
29. Каков геометрический смысл: а) значений второй квадратичной формы? б) модуля нормальной кривизны?
30. Дать определение главных кривизн и главных направлений на поверхности.
31. Может ли в точке поверхности быть ровно три главных направления?
32. Какой геометрический смысл имеет знак гауссовой кривизны?
33. Дать определение изометричных поверхностей.
34. Дать определение индикатрисы Дюпена.
35. Может ли индикатрисой Дюпена быть: а) парабола? б) окружность?
36. Является ли сфера минимальной поверхностью? Почему?
37. Две поверхности имеют одинаковые гауссовы кривизны в соответствующих точках. Являются ли они изометричными?
38. Изометричны ли локально сфера и плоскость?
39. Изменяется ли при изгибании поверхности: а) ее гауссова кривизна? б) вторая квадратичная форма? в) эйлерова кривизна?
40. Дать одно из определений геодезической линии на поверхности.
41. Какие кривые являются геодезическими: а) на сфере? б) на плоскости? в) цилиндре?
42. Сколько существует геодезических проходящих: а) через данную точку поверхности? б) через данную точку поверхности в данном направлении? в) через две точки поверхности?
43. Могут ли две геодезические касаться друг друга?
44. Сохраняется ли при изгибании поверхности свойство кривой быть геодезической?
45. Является кратчайшая линия геодезической?
46. Всякая ли геодезическая линия является кратчайшей?
47. Сформулировать основную теорему теории поверхностей.

## 7.2. Образец содержания экзаменационного билета

ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Образовательный уровень: бакалавриат

Направление подготовки: 44.03.05. Педагогическое образование

Очная форма обучения. Семестр: 1

Учебная дисциплина: Дифференциальная геометрия и топология

### Экзаменационный билет № n

Вопросы по № 2	Найдите кручение эллипса.
	В каждой ли точке регулярной кривой можно провести касательную. Почему?
	Какие значения принимает натуральный параметр на окружности радиуса 4?

	Что можно сказать о кривизнах в соответствующих точках подобных кривых?
Вопросы по 5 баллов	Вектор-функция одной переменной (определение) Предел вектор-функции. Свойства пределов вектор-функции.
	Доказать, что отрезок имеет минимальную длину среди всех кривых, которые соединяют его концы.
Вопросы по 7 баллов	<p>Дана кривая: <math>\vec{r} = (\sqrt{2}t + 1; e^{t-1}; e^{-t+1})</math>.</p> <p>а) является ли кривая регулярной в естественной области определения;  б) найдите или оцените длину данной кривой или ее какого-то куска.  в) составьте уравнения элементов трехгранника Френе в точке <math>(\sqrt{2} + 1; 1; 1)</math>;  г) вычислите кручение данной кривой.</p>

Утверждено на заседании кафедры  
Протокол № \_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже.

Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

Самостоятельная работа оценивается на основе предоставленных на проверку выполненных домашних, индивидуальных заданий с учетом своевременности их предоставления и соответствия требованиям к их выполнению.

Количество баллов за контрольную работу вычисляется как сумма баллов за все входящие в её состав задания. Каждое задание оценивается исходя из максимально возможного количества баллов с учетом правильности выполнения задания, полноты приводимых обоснований.

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку. Те, кто претендует на более высокий балл, проходят промежуточную аттестацию. Максимальное количество баллов на промежуточной аттестации – 100. Общее количество баллов за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на промежуточной аттестации и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 4



Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-2	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	15
	Контрольные работы по практике	25
	Контрольная работа по теоретическому материалу	15
ИТОГО		60
Экзамен		40
Общий итог за семестр		100

## Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

## 10.1. Основная литература

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/ П.С. Александров. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 512 с.
2. Ильин В. А. Аналитическая геометрия: Учеб. для вузов. – 7-е изд/ В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – Москва : Физматлит, 2004. – 224 с.

3. Коваленко Н.В. Лабораторные работы по курсу «Аналитическая геометрия»: учебно-методическое пособие. / Н.В. Коваленко, А.В. Мазнев, А.С. Гриценко. – Донецк : ДонНУ. – 2017. – 96 с.
4. Коваленко Н.В. Лабораторные работы по курсу «Аналитическая геометрия»: учебно-методическое пособие (часть вторая) / Н.В. Коваленко, А.В. Мазнев, А.С. Гриценко. – Донецк : ДонНУ. – 2019. – 101 с.
5. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии/ О.Н. Цубербиллер. – Москва : Наука, 2006. – 336 с.

#### 10.2. Дополнительная литература

6. Бортакровский, А.С. Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие/ А.С. Бор-такровский, А.В. Пантелеев. – Москва : Высш. шк., 2005. – 496 с.
7. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии: Учебн. пособие/ Н.В. Ефимов. – 13-е изд., стереот. – Москва : Физматлит, 2005. – 240 с.
8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии/ Д.В. Клетеник. – 13-е изд., стереотип. – Москва : Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1996. – 240 с.

### 11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.
2. **eLIBRARY.RU:** научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. –Текст: электронный.
3. Научная электронная библиотека **«КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
4. Электронно-библиотечная система **«Лань»:** [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
5. **ЭБС Юрайт:** электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.
6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.
7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.
8. **Электронный архив ДонГУ:** раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 31.03.2025). – Режим доступа: свободный.

### 12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)

3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)

4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).